

## 7. BANACHALGEBREN

**Definition 7.1.** *A heißt Banachalgebra (mit Einheit) wenn folgendes gilt:*

1) *A ist eine Algebra über  $\mathbb{C}$  mit Einheit, d.h., A ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und es existiert eine Multiplikation  $A \times A \rightarrow A$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $x, y, z \in A$  gilt*

$$(xy)z = x(yz), (x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz, \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

*Außerdem existiert eine Einheit e (ein neutrales Element), so dass  $ex = xe = x$  für alle  $x \in A$ .*

2) *A ist ein Banachraum.*

3)  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$  für alle  $x, y \in A$ .

4)  $\|e\| = 1$ .

Eine Banachalgebra ist also sowohl ein Banachraum als auch eine Algebra, und diese Strukturen sind miteinander verträglich (Forderungen 3), 4)).

*Beispiel 7.1.* Sei  $X$  ein Banachraum. Dann ist  $B(X)$  eine Banachalgebra mit der Hintereinanderausführung von Operatoren als Multiplikation. Eigenschaft 3) gilt wegen

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|=1} \|STx\| \leq \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|S\| \|T\|.$$

Die Einheit  $e$  ist die identische Abbildung. Dieser Operator hat Norm 1, wie gefordert.

*Beispiel 7.2.*  $C(K)$  mit der punktweisen Multiplikation  $(fg)(x) := f(x)g(x)$  ist eine Banachalgebra. Eigenschaft 3) folgt diesmal aus

$$\|fg\| = \max_{x \in K} |f(x)g(x)| \leq \max_{x \in K} |f(x)| \cdot \max_{x \in K} |g(x)| = \|f\| \|g\|.$$

Die Einheit  $e$  ist die Funktion  $e(x) \equiv 1$ , und es ist  $\|e\| = 1$ .  $C(K)$  ist sogar eine kommutative Banachalgebra, d.h.,  $fg = gf$  für alle  $f, g \in C(K)$ .

*Beispiel 7.3.*  $L_\infty$  mit der punktweisen Multiplikation ist ebenfalls eine kommutative Banachalgebra. Dies sieht man ähnlich wie im vorherigen Beispiel.

*Beispiel 7.4.* Schließlich ist auch  $\mathbb{C}$  mit dem Betrag als Norm und der normalen Multiplikation eine kommutative Banachalgebra.

Diese Liste von Beispielen ist natürlich nicht erschöpfend, aber wir sehen schon, dass es neben den Algebren von Operatoren (Beispiel 7.1), die uns hier besonders interessieren, viele weitere Banachalgebren gibt.

**Satz 7.1.** *Die Multiplikation in Banachalgebren ist stetig: Wenn  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , so konvergiert auch  $x_n y_n \rightarrow xy$ .*

*Beweis.*

$$\|xy - x_n y_n\| \leq \|x(y - y_n)\| + \|(x - x_n)y_n\| \leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\| \rightarrow 0$$

□

Sind  $A, B$  Algebren, so nennen wir eine Abbildung  $\phi : A \rightarrow B$  einen *Homomorphismus*, wenn  $\phi$  linear ist und  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$  für alle  $x, y \in A$  ( $\phi$  erhält also die komplette algebraische Struktur). Einen Homomorphismus  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi \neq 0$ , nennen wir *komplexen Homomorphismus*.

Ein  $x \in A$  heißt *invertierbar*, wenn es ein  $y \in A$  gibt mit  $xy = yx = e$ . Ein solches  $y$  ist eindeutig, falls es existiert. Wir schreiben  $y = x^{-1}$  und nennen  $x^{-1}$  die Inverse von  $x$ . Schließlich setzen wir

$$G(A) = \{x \in A : x \text{ ist invertierbar}\}.$$

$G(A)$  ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation (das erklärt die Bezeichnung), d.h., wenn  $x, y \in G(A)$ , so ist auch  $xy \in G(A)$  und  $x^{-1} \in G(A)$ . Diese Bemerkung beweisen wir einfach durch Angabe der Inversen:  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  und  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

**Satz 7.2.** *Sei  $\phi$  ein komplexer Homomorphismus. Dann ist  $\phi(e) = 1$  und  $\phi(x) \neq 0$  für alle  $x \in G(A)$ .*

*Beweis.* Da  $\phi \neq 0$ , gibt es ein  $y \in A$  mit  $\phi(y) \neq 0$ . Da  $\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$ , folgt, dass  $\phi(e) = 1$ . Für alle  $x \in G(A)$  gilt also  $\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1 \neq 0$ , also  $\phi(x) \neq 0$ .  $\square$

**Satz 7.3.** *Sei  $A$  eine Banachalgebra,  $x \in A$  mit  $\|x\| < 1$  und  $\phi$  ein komplexer Homomorphismus. Dann gilt:*

- $e - x \in G(A)$  und  $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .
- $|\phi(x)| < 1$ .

Die Reihe aus Teil a) heißt *Neumannsche Reihe*. Die Potenz  $x^n$  ist definiert als  $n$ -faches Produkt von  $x$  mit sich selbst; dabei ist  $x^0 := e$ . Die Neumannsche Reihe ist eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe.

*Beweis.* a) Wegen Eigenschaft 3) aus Definition 7.1 ist  $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ , und da  $\|x\| < 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  absolut. Also existiert  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  auch in  $A$ , und wegen der Stetigkeit der Multiplikation ist

$$\begin{aligned} (e - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= (e - x) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (e - x) \sum_{n=0}^N x^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N x^n - \sum_{n=0}^N x^{n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (e - x^{N+1}) = e. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (e - x) = e$ .

b) Für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| \geq 1$  ist  $e - (1/\lambda)x$  nach Teil a) invertierbar. Also zeigt Satz 7.2, dass  $0 \neq \phi(e - (1/\lambda)x) = 1 - \phi(x)/\lambda$ , also  $\phi(x) \neq \lambda$ .  $\square$

**Korollar 7.2.** a) *Wenn  $x \in G(A)$  und  $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ , so ist auch  $x + h \in G(A)$ . Insbesondere ist  $G(A)$  offen.*

b) *Wenn  $\phi$  ein komplexer Homomorphismus ist, so ist  $\phi \in A^*$  und  $\|\phi\| = 1$ .*

*Beweis.* a)  $x + h = x(e + x^{-1}h)$  und nach Voraussetzung ist  $\|x^{-1}h\| < 1$ , also ist  $e + x^{-1}h \in G(A)$  nach Satz 7.3a) und somit auch  $x + h \in G(A)$ .

b) Satz 7.3b) zeigt, dass  $\phi$  stetig ist und  $\|\phi\| \leq 1$ . Andererseits ist  $\phi(e) = 1 = \|e\|$ , also  $\|\phi\| = 1$ .  $\square$

Wir übertragen jetzt Definition 6.2 auf allgemeine Banachalgebren:

**Definition 7.3.** Sei  $A$  eine Banachalgebra und  $x \in A$ . Setze

$$\rho(x) = \{z \in \mathbb{C} : ze - x \in G(A)\},$$

$$\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x),$$

$$r(x) = \sup\{|z| : z \in \sigma(x)\}.$$

Wir nennen  $\rho(x)$  die Resolventenmenge,  $\sigma(x)$  das Spektrum und  $r(x)$  den Spektralradius von  $x$ . Die Inverse  $(ze - x)^{-1}$  ( $z \in \rho(x)$ ) heißt Resolvente von  $x$ .

Im Spezialfall  $A = B(H)$  sind Resolventenmenge und Spektrum also wie in Definition 6.2 erklärt.

**Satz 7.4.** a)  $\rho(x)$  ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

b) Die Resolvente  $R : \rho(x) \rightarrow A$ ,  $z \mapsto (ze - x)^{-1}$  besitzt konvergente Potenzreihenentwicklungen um jeden Punkt  $z_0 \in \rho(x)$ : Zu jedem  $z_0 \in \rho(x)$  existiert ein  $r > 0$ , so dass  $K_r(z_0) \subset \rho(x)$  und

$$(ze - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z_0e - x)^{-n-1} (z - z_0)^n,$$

falls  $|z - z_0| < r$ .

Hierbei ist  $y^n$  für  $n < 0$  definiert als  $(y^{-1})^{|n|}$ . Wir sagen kurz, dass die Resolvente eine holomorphe Funktion ist (und definieren diesen Begriff durch die Eigenschaft aus Satz 7.4b), also durch die Existenz von Potenzreihendarstellungen).

*Beweis.* a) Sei  $z_0 \in \rho(x)$ . Korollar 7.2 zeigt, dass  $ze - x = z_0e - x + (z - z_0)e \in G(A)$ , falls  $|z - z_0| < r := 1/\|(z_0e - x)^{-1}\|$ .

b) Wähle  $r$  wie in a). Dann ist  $K_r(z_0) \subset \rho(x)$  und für alle  $z \in K_r(z_0)$  gilt

$$\begin{aligned} (ze - x)^{-1} &= (z_0e - x + (z - z_0)e)^{-1} = [(z_0e - x)(e + (z - z_0)(z_0e - x)^{-1})]^{-1} \\ &= [e + (z - z_0)(z_0e - x)^{-1}]^{-1} (z_0e - x)^{-1} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n (z_0e - x)^{-n} \right) (z_0e - x)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n (z_0e - x)^{-n-1}. \end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Neumannsche Reihe und (im letzten Schritt) die Stetigkeit der Multiplikation benutzt.  $\square$

**Satz 7.5.** a)  $\sigma(x)$  ist kompakt und  $\sigma(x) \neq \emptyset$ .

b)  $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$ .

In Teil b) ist insbesondere behauptet, dass  $\|x^n\|^{1/n}$  für jedes  $x \in A$  konvergiert. Wegen der Multiplikativität der Norm ist  $\|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$ , also  $r(x) \leq \|x\|$ .

*Beweis.* a) Wegen Satz 7.4a) ist  $\sigma(x)$  abgeschlossen. Wenn  $|z| > \|x\|$ , so ist  $ze - x = z(e - (1/z)x) \in G(A)$  nach Satz 7.3a), also  $z \notin \sigma(x)$ . Daher ist  $\sigma(x)$  auch beschränkt und somit kompakt. Die Neumannsche Reihe liefert für  $|z| > \|x\|$  auch noch die Darstellung

$$(7.1) \quad (ze - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n.$$

Wir nehmen nun an, dass  $\sigma(x) = \emptyset$ . Sei  $F \in A^*$  beliebig, und setze  $g(z) = F((ze - x)^{-1})$ . Da  $\rho(x) = \mathbb{C}$ , ist  $g$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert. Satz 7.4b) und die Stetigkeit von  $F$  zeigen, dass  $g$  holomorph ist, insgesamt ist  $g$  also eine ganze Funktion. Falls  $|z| \geq 2\|x\|$ , so erhalten wir mit (7.1)

$$|g(z)| = \left| F \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n \right) \right| \leq \|F\| \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{-n-1} \|x\|^n \leq \frac{2\|F\|}{|z|}.$$

$g$  ist also eine beschränkte ganze Funktion. Nach dem Satz von Liouville muss  $g$  daher konstant sein. Da  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$ , muss  $g(z) \equiv 0$  gelten. Also gilt also  $F((ze - x)^{-1}) = 0$  für alle  $F \in A^*$  (und alle  $z \in \mathbb{C}$ ). Der Satz von Hahn-Banach (siehe insbesondere Korollar 4.1b)) impliziert also, dass  $(ze - x)^{-1} = 0$ , ein offensichtlicher Widerspruch, da 0 nicht invertierbar ist. Die Annahme  $\sigma(x) = \emptyset$  ist also nicht haltbar.

b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^n \in \rho(x^n)$ . Es ist

$$z^n e - x^n = (ze - x)(z^{n-1}e + z^{n-2}x + \dots + x^{n-1}),$$

und durch Multiplikation mit  $(z^n e - x^n)^{-1}$  von rechts sehen wir, dass  $ze - x$  ein Rechtsinverses besitzt. Eine analoge Rechnung zeigt, dass  $ze - x$  auch ein Linksinverses hat, also insgesamt  $ze - x \in G(A)$  und  $z \in \rho(x)$ . Anders ausgedrückt ist also  $z^n \in \sigma(x^n)$ , falls  $z \in \sigma(x)$ . Aus dem Beweis von Teil a) wissen wir bereits, dass  $|z| \leq \|y\|$  für alle  $z \in \sigma(y)$ . Daher ist  $|z|^n \leq \|x^n\|$  für alle  $z \in \sigma(x)$  und somit  $r(x) \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}$ .

Wähle nun  $F \in A^*$  fest, aber beliebig und setze wieder  $g(z) = F((ze - x)^{-1})$ .  $g$  ist holomorph in  $\rho(x) \supset \{z \in \mathbb{C} : |z| > r(x)\}$  und für  $|z| > \|x\|$  ist  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(x^n) (z^{-1})^{n+1}$ . Mit anderen Worten:  $g$  ist auch bei  $z = \infty$  holomorph. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe beschreibt den größten Kreis, auf den die Funktion noch holomorph fortgesetzt werden kann. Unsere obigen Überlegungen zeigen daher, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} F(x^n) \zeta^{n+1}$  mindestens  $1/r(x)$  sein muss. Folglich ist für alle  $a \in [0, 1/r(x))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a^n x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x^n) a^n = 0.$$

Dies gilt für jedes  $F \in A^*$ , also konvergiert  $a^n x^n$  schwach gegen 0. Schwach konvergente Folgen sind beschränkt (siehe Blatt 5, Aufgabe 1), also ist  $C_a := \sup_{n \geq 0} \|a^n x^n\| < \infty$ . Es folgt, dass

$$\|x^n\|^{1/n} \leq \frac{C_a^{1/n}}{a} \rightarrow \frac{1}{a} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da  $a < 1/r(x)$  beliebig ist, sehen wir, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x).$$

Andererseits haben wir bereits gezeigt, dass

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

□

**Satz 7.6** (Gelfand-Mazur). *Falls  $A$  eine Banachalgebra ist mit  $G(A) = A \setminus \{0\}$ , so ist  $A \cong \mathbb{C}$ .*

Genauer sagt der Satz, dass es isometrischen Isomorphismus  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, also einen bijektiven Homomorphismus  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|\phi(x)| = \|x\|$  für alle  $x \in A$ .

*Beweis.* Für jedes  $x \in A$  kann es höchstens ein  $z = z(x) \in \mathbb{C}$  geben, so dass  $ze - x = 0$ . Also besteht  $\sigma(x)$  aus höchstens einem Punkt. Wegen Satz 7.5a) besteht  $\sigma(x)$  aus genau einem Punkt:  $\sigma(x) = \{z(x)\}$ . Also  $x = z(x)e$  für alle  $x \in A$ , und die Abbildung  $\phi(x) = z(x)$  hat die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels untersuchen wir, wie das Spektrum eines Elements  $x$  von der Algebra abhängt. Wir betrachten folgende Situation: Sei  $B$  eine Banachalgebra,  $A \subset B$  eine Unter algebra von  $B$ , die selbst eine Banachalgebra mit der von  $B$  induzierten Struktur ist ( $A$  muss also zusätzlich abgeschlossen sein). Falls nun  $x \in A$ , so folgt aus der Definition, dass  $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$ . Satz 7.5b) zeigt, dass  $r_A(x) = r_B(x)$ .

**Lemma 7.4.** *Sei  $A$  eine Banachalgebra,  $x_n \in G(A)$ ,  $x \notin G(A)$  und  $x_n \rightarrow x$ . Dann  $\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein  $M > 0$ , so dass  $\|x_n^{-1}\| \leq M$  für unendlich viele  $n$ . Also können wir ein  $n \in \mathbb{N}$  finden, so dass  $\|x_n^{-1}\| \leq M$  und  $\|x_n - x\| < 1/M$ . Dann ist

$$\|e - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| \leq \|x_n^{-1}\| \|x_n - x\| < 1,$$

also ist  $x_n^{-1}x = e - (e - x_n^{-1}x) \in G(A)$  nach Satz 7.3a). Dann wäre aber auch  $x = x_n x_n^{-1}x$  invertierbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Lemma 7.5.** *Seien  $V, W$  offene Mengen mit  $V \subset W$ ,  $\partial V \cap W = \emptyset$ . Dann ist  $V$  eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von  $W$ .*

Hierbei können  $V, W$  Teilmengen eines beliebigen topologischen Raums  $X$  sein. Allerdings brauchen wir das Lemma gleich nur für  $X = \mathbb{C}$ . Eine topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn  $X$  nur in trivialer Weise in offene Mengen zerlegt werden kann: Wenn  $X = U_1 \cup U_2$ , wobei  $U_1, U_2$  offen und disjunkt sind, so ist  $X = U_1$  oder  $X = U_2$ . Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *zusammenhängend*, wenn  $A$  mit der Relativtopologie ein zusammenhängender topologischer Raum ist. Eine *Zusammenhangskomponente* ist eine maximale zusammenhängende Menge. Jeder topologische Raum kann als die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten geschrieben werden.

*Beweis.* Wir müssen folgendes zeigen: Wenn  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $W$  ist mit  $Z \cap V \neq \emptyset$ , so ist  $Z \subset V$ . Da  $W$  den Rand von  $V$  nicht schneidet, ist auch  $Z \cap \partial V = Z \cap (\overline{V} \setminus V) = \emptyset$ . Somit ist

$$Z = (Z \cap V) \cup (Z \cap (X \setminus \overline{V})).$$

Dies ist eine Darstellung von  $Z$  als disjunkte Vereinigung relativ offener Mengen. Da  $Z \cap V \neq \emptyset$ , muss also tatsächlich  $Z \cap V = Z$  gelten, also  $Z \subset V$ .  $\square$

**Satz 7.7.** *Sei  $B$  eine Banachalgebra und sei  $A \subset B$  eine abgeschlossene Unter algebra von  $B$ . Dann lässt sich  $\sigma_A(x)$  darstellen als Vereinigung von  $\sigma_B(x)$  und beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\rho_B(x)$ .*

Etwas eingängiger als der Satz sind folgende Konsequenzen aus Satz 7.7.

**Korollar 7.6.** a) Wenn  $\rho_B(x)$  zusammenhängend ist, so ist  $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ .

b) Wenn  $\overset{\circ}{\sigma}_A(x) = \emptyset$ , so ist  $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ .

*Beweis.* a) Nach Voraussetzung besitzt  $\rho_B(x)$  nur eine Zusammenhangskomponente, und diese ist unbeschränkt, da  $\sigma_B(x)$  kompakt ist.

b) Die Zusammenhangskomponenten von  $\rho_B(x)$  sind offen, können also in der Darstellung von  $\sigma_A(x)$  nach Satz 7.7 nicht vorkommen.  $\square$

*Beweis von Satz 7.7.* Seien  $A \subset B$  Banachalgebren, und sei  $x \in A$ . Wenn  $z \in \partial\rho_A(x)$ , so ist  $z \notin \rho_A(x)$ , da  $\rho_A(x)$  offen ist. Andererseits ist  $z \in \overline{\rho_A(x)}$ , also gibt es  $z_n \in \rho_A(x)$ , so dass  $z_n \rightarrow z$ . Dann ist  $z_n e - x \in G(A)$ ,  $z e - x \notin G(A)$ , also zeigt Lemma 7.4, dass  $\|(z_n e - x)^{-1}\| \rightarrow \infty$ . Invertieren ist eine stetige Operation in Banachalgebren, und  $z_n e - x \rightarrow z e - x$ , also ist  $z e - x$  auch in  $B$  nicht invertierbar, d.h.  $z \notin \rho_B(x)$ . Wir haben gezeigt, dass  $\partial\rho_A(x) \cap \rho_B(x) = \emptyset$ . Wenn wir also die Menge  $\rho_B(x)$  als Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten schreiben ( $\rho_B(x) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ), so liefert Lemma 7.5 eine Darstellung der Form  $\rho_A(x) = \bigcup_{\alpha \in I_0} U_\alpha$  mit  $I_0 \subset I$ . Somit ist

$$\sigma_A(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(x) = \sigma_B(x) \cup \bigcup_{\alpha \in I \setminus I_0} U_\alpha.$$

$\square$