6. Operatoren in Hilberträumen

Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$. Wir wollen einen Operator T^* definieren, so dass wir T in Skalarprodukten als T^* herüberziehen können. Genauer gehen wir wie folgt vor: Fixiere $y \in H$ und betrachte die Abbildung $x \mapsto \langle y, Tx \rangle$. Diese Abbildung ist offensichtlich linear, und da

$$|\langle y, Tx \rangle| \leq \|y\| \, \|Tx\| \leq \|y\| \, \|T\| \, \|x\|,$$

ist sie auch stetig. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es also ein $z = z_y \in H$, so dass $\langle y, Tx \rangle = \langle z_y, x \rangle$ für alle $x \in H$. Wir definieren den Operator $T^* : H \to H$ durch $T^* y = z_y$. Nach Definition gilt also $\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle$ für alle $x, y \in H$; umgekehrt wird T^* durch diese Gleichung eindeutig festgelegt. Wir nennen T^* den (zu T) *adjungierten Operator.*

Satz 6.1. *Seien $S, T \in B(H)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*
a) $T^* \in B(H)$
b) $(S+T)^* = S^* + T^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
c) $(ST)^* = T^* S^*$
d) $T^{**} = T$
e) Falls T invertierbar ist, so ist auch T^* invertierbar, und $\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$.
f) $\|T\| = \|T^*\|$, $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

Hierbei heißt ein $T \in B(H)$ *invertierbar* (genauer: invertierbar in $B(H)$), wenn es ein $S \in B(H)$ gibt mit $ST = TS = 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn T injektiv ist und die (automatisch lineare) Umkehrabbildung in $B(H)$ liegt. Nach dem Satz von der stetigen Inversen ist $T \in B(H)$ also genau dann invertierbar, wenn T bijektiv ist. Wir schreiben $S = T^{-1}$ für die Inverse.

Beweis. a) Die Linearität folgt aus der Definition von T^* und der (Anti-)Linearität des Skalarprodukts. T^* ist stetig, denn

$$\|T^* y\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T^* y, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle y, Tx \rangle| \leq \|T\| \, \|y\|.$$

Diese Abschätzung zeigt zusätzlich, dass $\|T^*\| \leq \|T\|$.

b) folgt unmittelbar aus der Definition des adjungierten Operators.

c) folgt aus $\langle y, STx \rangle = \langle S^* y, Tx \rangle = \langle T^* S^* y, x \rangle$.

d) $\langle y, T^* x \rangle = \overline{\langle T^* x, y \rangle} = \overline{\langle x, Ty \rangle} = \langle Ty, x \rangle$, also $T^{**} = T$.

e) Offensichtlich ist $1^* = 1$. Aus $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$ folgt also mit Hilfe von c), dass

$$\left(T^{-1}\right)^* T^* = T^* \left(T^{-1}\right)^* = 1.$$

Da $\left(T^{-1}\right)^* \in B(H)$ nach a), sehen wir hieraus, dass T^* invertierbar ist und $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

f) Aus dem Beweis von Teil a) wissen wir bereits, dass $\|T^*\| \leq \|T\|$. Mit d) folgt jetzt, dass $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$, also $\|T\| = \|T^*\|$. Es ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$, andererseits aber

$$\|T^*T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle y, T^*Tx \rangle| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*Tx \rangle| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2,$$

also $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Schließlich folgt auch, dass $\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. □

Satz 6.2. *Sei $T \in B(H)$. Dann gilt $N(T^*) = R(T)^\perp$ und $N(T) = R(T^*)^\perp$.*

Beweis. Es ist $y \in N(T^*)$ genau dann, wenn $\langle T^* y, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Dies gilt genau dann, wenn $\langle y, Tx\rangle = 0$ für alle $x \in H$, also genau dann, wenn $y \in R(T)^\perp$. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, denn $N(T) = N(T^{**}) = R(T^*)^\perp$. □

Definition 6.1. *Sei $T \in B(H)$. T heißt* selbstadjungiert, *wenn $T = T^*$. T heißt* unitär, *wenn $TT^* = T^*T = 1$. T heißt* normal, *wenn $TT^* = T^*T$.*

Selbstadjungierte und unitäre Operatoren sind also auch normal. Ein Operator $U \in B(H)$ ist genau dann unitär, wenn U invertierbar ist und $U^* = U^{-1}$. Teil b) des folgendes Satzes zeigt, dass unitäre Operatoren die gesamte Hilbertraumstruktur erhalten.

Satz 6.3. *Sei $U \in B(H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
a) U ist unitär.
b) U ist bijektiv und $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.
c) U ist surjektiv und $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$.

Beweis. a) $\Longrightarrow$ b): Es ist klar, dass U bijektiv ist, und $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

b) $\Longrightarrow$ a): Es ist $\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$, also $U^*U = 1$. Da U bijektiv, also invertierbar ist, folgt, dass $U^{-1} = U^*$.

b) $\Longrightarrow$ c) ist trivial.

c) $\Longrightarrow$ b): Da U isometrisch ist, ist U injektiv, also insgesamt bijektiv. Dass die Skalarprodukte erhalten bleiben, sieht man durch „Polarisieren“ (vergleiche Blatt 6, Aufgabe 1a)). □

Satz 6.4. *Sei $P \in B(H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
a) P ist eine orthogonale Projektion.
b) $1 - P$ ist eine orthogonale Projektion.
c) $P^2 = P$ und $R(P) = N(P)^\perp$.
d) $P^2 = P$ und P ist selbstadjungiert.
e) $P^2 = P$ und P ist normal.

Beweis. a) $\Longleftrightarrow$ b): Wenn P die Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum M ist, so ist $1 - P$ die Projektion auf $M^\perp$.

a) $\Longrightarrow$ c): Wir wissen bereits aus Kapitel 5, dass $P^2 = P$. Außerdem ist $R(P) = M$, $N(P) = M^\perp$, wenn $P = P_M$ die Projektion auf M ist.

c) $\Longrightarrow$ a): Ist $y \in R(P)$, also $y = Pw$ für ein $w \in H$, so ist $Py = P^2w = Pw = y$. Ist $z \in R(P)^\perp = N(P)^{\perp\perp} = N(P)$ (in der letzten Gleichung benutzen wir, dass $N(P)$ ein abgeschlossener Teilraum ist), so ist $Pz = 0$. Nach dem Projektionssatz können wir ein beliebiges $x \in H$ zerlegen in $x = y + z$ mit $y \in R(P)$, $z \in R(P)^\perp$, denn wegen der Voraussetzung ist $R(P)$ ein abgeschlossener Teilraum. Somit ist $Px = Py + Pz = y$, also ist P die Projektion auf $R(P)$.

a) $\Longrightarrow$ d): Wie oben ist klar, dass $P^2 = P$. Für beliebige $x, y \in H$ ist $\langle (1 - P)x, Py\rangle = 0$, da $(1 - P)x \in M^\perp$, $Py \in M$ (wenn P die Projektion auf M ist). Also

$$\langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px, y\rangle \qquad (x, y \in H),$$

und dies sagt, dass $P^* = P$.

d) $\Longrightarrow$ e) ist trivial.

e) $\Longrightarrow$ c): Da P normal ist, ist

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle PP^*x, x\rangle = \|P^*x\|^2.$$

Insbesondere ist also $N(P) = N(P^*)$. Daher zeigt Satz 6.2, dass $N(P) = R(P)^\perp$. Da $(1-P)P = P - P^2 = 0$, gilt $N(1-P) \supset R(P)$. Ist andererseits $x \in N(1-P)$, so ist $x = Px \in R(P)$. Daher ist $N(1-P) = R(P)$, somit ist $R(P)$ abgeschlossen und $R(P) = R(P)^{\perp\perp} = N(P)^\perp$. □

Satz 6.5. *Seien P, Q orthogonale Projektionen. Dann ist PQ genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $PQ = QP$. In diesem Fall ist $R(PQ) = R(P) \cap R(Q)$.*

Beweis. Falls PQ eine orthogonale Projektion ist, so gilt wegen Satz 6.4d) $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$. Falls umgekehrt $PQ = QP$, so zeigt die gleiche Rechnung, dass PQ selbstadjungiert ist. Außerdem ist $(PQ)^2 = PQPQ = P^2Q^2 = PQ$, und wieder mit Satz 6.4d) folgt, dass $PQ = QP$ eine orthogonale Projektion ist.

Offensichtlich ist $R(PQ) \subset R(P)$ und $R(PQ) = R(QP) \subset R(Q)$. Andererseits gilt für jedes $x \in R(P) \cap R(Q)$, dass $PQx = Px = x$, also ist $x \in R(PQ)$. □

Wir wollen versuchen, ein $T \in B(H)$ auf eine einfache Normalform zu bringen. Falls $H = \mathbb{C}^n$, so wissen wir, dass jeder Operator (bzw. jede Matrix) durch einen Basiswechsel auf (verallgemeinerte) Eigenvektoren auf Jordan-Normalform gebracht werden kann. Die meisten Matrizen sind sogar diagonalisierbar. Einen derart allgemeinen Satz können wir für unendlich-dimensionale Hilberträume nicht erwarten. Tatsächlich ist z.B. schon folgende bescheiden anmutende Frage ein berühmtes und seit langem offenes Problem:

Besitzt jeder Operator $T \in B(H)$ einen nichttrivialen invarianten Teilraum?

Dabei nennen wir einen abgeschlossenen Teilraum $M \subset H$ *invariant* (unter T), wenn $TM \subset M$. Die trivialen invarianten Teilräume sind $\{0\}$ und H.

Wir werden uns daher auf normale Operatoren konzentrieren. Für $H = \mathbb{C}^n$ wissen wir aus der linearen Algebra, dass jedes normale T durch einen Basiswechsel auf eine ONB aus Eigenvektoren diagonalisiert werden kann. In den folgenden Kapiteln entwickeln wir Hilfsmittel für den Beweis entsprechender Aussagen in beliebigen Hilberträumen.

Definition 6.2. *Sei $T \in B(H)$. Setze*

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - z \text{ ist invertierbar in } B(H)\},$$
$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Wir nennen $\rho(T)$ die Resolventenmenge *und $\sigma(T)$ das* Spektrum *von T.*

Aufgabe 6.1. Zeige, dass das Spektrum eines Operators $T \in B(\mathbb{C}^n)$ die Menge der Eigenwerte von T ist.