5. Hilberträume

Definition 5.1. *Sei H ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \to \mathbb{C}$ heißt* Skalarprodukt *(oder inneres Produkt) auf H, wenn für alle $x, y, z \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$*
1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
3) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
4) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Die Eigenschaften 3), 4) sagen also, dass ein Skalarprodukt linear im zweiten Argument ist. Zusammen mit 2) folgt, dass ein Skalarprodukt im ersten Argument *antilinear* ist, d.h., $\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ und $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Satz 5.1. *a) $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definiert eine Norm auf H.*
b) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
c) In b) gilt Gleichheit genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.

Beweis. Wir beweisen zunächst b) und c). Seien $x, y \in H$. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = |\alpha|^2\|x\|^2 + \|y\|^2 + \alpha\langle y, x\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle. \tag{5.1}$$

Falls $x = 0$, so gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit Gleichheit. Falls $x \neq 0$, so können wir $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ setzen. Dann liefert (5.1)

$$0 \leq \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2,$$

und dies ergibt nach Umformung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Gleichheit gilt somit genau dann, wenn $x = 0$ oder $\alpha x + y = 0$, also genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Wir kommen jetzt zum Beweis von a). Die erste Normeigenschaft folgt direkt aus 1) aus Definition 5.1. Ferner gilt

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|,$$

und schließlich zeigt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .\end{aligned}$$

□

Eine wichtige Folgerung aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

Korollar 5.2. *Das Skalarprodukt ist stetig: Wenn $x_n \to x$, $y_n \to y$ (bezüglich der durch das Skalarprodukt wie in Satz 5.1a) erzeugten Norm), so konvergiert auch $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Aufgabe 5.1. Beweise Korollar 5.2.

Definition 5.3. *Ein Raum H mit Skalarprodukt heißt* Hilbertraum, *wenn H mit der vom Skalarprodukt erzeugten Norm vollständig ist (also ein Banachraum).*

Die Räume ℓ_2 und $L_2(\Omega, \mu)$ sind Hilberträume mit den Skalarprodukten $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$ bzw. $\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)\, d\mu(x)$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass die

Eigenschaften aus Definition 5.1 gelten, und wir wissen bereits, dass diese Räume vollständig sind.

Im Folgenden sei H immer ein Hilbertraum. $x, y \in H$ heißen *orthogonal,* wenn $\langle x, y\rangle = 0$ (Notation: $x \perp y$). Für eine Teilmenge $M \subset H$ definieren wir das *orthogonale Komplement* $M^{\perp}$ durch

$$M^{\perp} = \{x \in H : \langle x, m\rangle = 0\,\forall m \in M\}.$$

Satz 5.2. *a) $M^{\perp}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H.*
b) $M^{\perp} = L(M)^{\perp} = \overline{L(M)}^{\perp}$

Hierbei bezeichnet $L(M)$ die lineare Hülle von M, also die Menge der (endlichen) Linearkombinationen von Vektoren aus M.

Beweis. a) Seien $x, y \in M^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $z \in M$

$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle = 0,$$

also $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$ und $M^{\perp}$ ist ein Teilraum. Wenn $x_n \in M^{\perp}$, $x \in H$, $x_n \to x$, so ist wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts für alle $z \in M$

$$\langle z, x\rangle = \langle z, \lim_{n\to\infty} x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, x_n\rangle = 0,$$

also $x \in M^{\perp}$ und $M^{\perp}$ ist abgeschlossen.

b) Da $M \subset L(M) \subset \overline{L(M)}$, gilt $\overline{L(M)}^{\perp} \subset L(M)^{\perp} \subset M^{\perp}$. Sei nun $x \in M^{\perp}$. Dann ist $\langle z, x\rangle = 0$ für alle $z \in M$. Wegen der (Anti-)Linearität des Skalarprodukts gilt dies aber auch noch für alle $z \in L(M)$ und wegen der Stetigkeit sogar für alle $z \in \overline{L(M)}$. Also ist $x \in \overline{L(M)}^{\perp}$. □

Satz 5.3. *Sei M ein abgeschlossener Teilraum von H und $x \in H$. Dann gibt es ein eindeutiges $m \in M$ mit minimalem Abstand zu x: Es gibt genau ein $m \in M$, so dass*

$$\|x - m\| = \inf_{y\in M} \|x - y\|.$$

Beweis. Für beliebige $x, y \in H$ gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{5.2}$$

Aufgabe 5.2. Beweise (5.2).

Setze $d = \inf_{y\in M} \|x - y\|$ und bestimme $y_n \in M$ mit $\|x - y_n\| \to d$. Aus (5.2) folgt, dass

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|y_m - x - (y_n - x)\|^2\\ &= 2\,\|y_m - x\|^2 + 2\,\|y_n - x\|^2 - \|y_m + y_n - 2x\|^2\\ &= 2\,\|y_m - x\|^2 + 2\,\|y_n - x\|^2 - 4\,\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\|^2\end{aligned}$$

Die ersten zwei Terme im letzten Ausdruck konvergieren jeweils gegen $2d^2$. Da $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in M$, ist $\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\| \geq d$. Zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ können wir daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2d^2 + \epsilon + 2d^2 + \epsilon - 4d^2 = 2\epsilon,$$

falls $m, n \geq n_0$. Also ist y_n eine Cauchyfolge, und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$ existiert. Es ist $y \in \overline{M} = M$ und $\|x - y\| = d$, d.h., y ist die gesuchte beste Approximation.

Wenn y' ein zweiter Vektor mit diesen Eigenschaften ist, so zeigt das Argument von oben, dass

$$\|y - y'\|^2 = 4d^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

also $y = y'$. □

Satz 5.4 (Projektionssatz)**.** *Sei M ein abgeschlossener Teilraum von H. Jedes $x \in H$ hat genau eine Darstellung der Form $x = y + z$ mit $y \in M$ und $z \in M^\perp$.*

Beweis. Bestimme nach Satz 5.3 ein $y \in M$ mit

$$\|x - y\| = d := \min_{m \in M} \|x - m\|$$

und setze $z = x - y$. Wir zeigen jetzt, dass $z \in M^\perp$. Sei $w \in M$, $w \neq 0$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ ist dann

$$d^2 \leq \|x - (y + \alpha w)\|^2 = \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 + |\alpha|^2 \, \|w\|^2 - 2 \operatorname{Re} \alpha \langle z, w\rangle.$$

Wir setzen $\alpha = \frac{\langle w, z\rangle}{\|w\|^2}$ und benutzen, dass $\|z\| = d$. Wir erhalten die Ungleichung $|\langle w, z\rangle|^2 \leq 0$, also $\langle w, z\rangle = 0$. Da $w \in M$ beliebig war, ist $z \in M^\perp$, wie gewünscht.

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y' \in M$, $z, z' \in M^\perp$. Dann ist aber

$$y - y' = z' - z \in M \cap M^\perp = \{0\},$$

also $y = y'$ und $z = z'$. □

Satz 5.4 gibt uns die Möglichkeit, den Hilbertraum durch „Projezieren“ in kleinere Bestandteile zu zerlegen und umgekehrt den ganzen Raum wieder aus diesen Bestandteilen aufzubauen. Dieses wichtige Instrument fehlt in allgemeinen Banachräumen.

Für einen abgeschlossenen Teilraum M von H führen wir die *(orthogonale) Projektion* P_M auf M ein durch $P_M x = y$, wobei $y \in M$ wie im Projektionssatz bestimmt wird. Wir ziehen einige wichtige Folgerungen aus dem Projektionssatz:

Korollar 5.4. *a) $P_M \in B(H)$, $P_M^2 = P_M$ und falls $M \neq \{0\}$, so ist $\|P_M\| = 1$.*
b) Für beliebige Teilmengen $A \subset H$ gilt $A^{\perp\perp} = \overline{L(A)}$.

In a) schreiben wir kurz $B(H, H) = B(H)$.

Beweis. a) Die Linearität von P_M ist leicht zu sehen. Wenn $x = y + z$ wie in Satz 5.4, so ist $y = y + 0$ eine Zerlegung von y in Vektoren $y \in M$, $0 \in M^\perp$. Daher ist $P_M^2 = P_M$. Schließlich ist

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \langle y + z, y + z\rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

also $\|P_M x\| = \|y\| \leq \|x\|$. Das sagt, dass $P_M \in B(H)$ und $\|P_M\| \leq 1$. Für $x \in M$ ist jedoch $P_M x = x$, also $\|P_M\| \geq 1$, falls $M \neq \{0\}$.

b) Nach Satz 5.2b) ist $A^{\perp\perp} = \overline{L(A)}^{\perp\perp} \supset \overline{L(A)}$. Ist $x \in A^{\perp\perp}$, so können wir gemäß Projektionssatz zerlegen in $x = y + z$ mit $y \in \overline{L(A)}$, $z \in \overline{L(A)}^\perp = A^\perp$. Dann ist aber auch $y \in A^{\perp\perp}$ und folglich

$$z = x - y \in A^{\perp\perp} \cap A^\perp = \{0\}.$$

Also ist $x = y \in \overline{L(A)}$. □

Wir haben in Kapitel 4 gesehen, dass die Hilberträume ℓ_2, L_2 ihre eigenen Dualräume sind. Das gilt allgemein:

Satz 5.5 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Jedes $F \in H^*$ hat die Form $F(x) = \langle y, x\rangle$ mit einem $y = y_F \in H$. Es gilt $\|F\| = \|y_F\|$.*

Umgekehrt ist klar, dass jedes $y \in H$ ein $F = F_y \in H^*$ erzeugt durch $F_y(x) = \langle y, x\rangle$. Also ist $H \cong H^*$. Etwas Vorsicht ist hier geboten, denn die Abbildung $y \mapsto F_y$ ist antilinear (es ist $F_{\alpha y} = \overline{\alpha} F_y$). Das führt in den Anwendungen von Satz 5.5 aber nicht zu Schwierigkeiten.

Beweis. Die Behauptung ist klar für $F = 0$ (wähle $y = 0$). Da F stetig ist, ist $N(F)$ ein abgeschlossener Teilraum von H. Wenn $F \neq 0$, so ist $N(F)^\perp$ nach dem Projektionssatz also nicht der Nullraum, und wir können ein $z \in N(F)^\perp$, $z \neq 0$ wählen. Für jedes $x \in H$ ist dann $F(z)x - F(x)z \in N(F)$, also

$$\langle z, F(z)x - F(x)z\rangle = F(z)\langle z, x\rangle - F(x)\|z\|^2 = 0$$

oder

$$F(x) = \frac{F(z)}{\|z\|^2}\langle z, x\rangle = \langle y, x\rangle$$

mit $y = \overline{\frac{F(z)}{\|z\|^2}}\, z$.

Es ist $|\langle y, x\rangle| \le \|y\|\,\|x\|$, also $\|F\| \le \|y\|$. Andererseits ist $F(y) = \|y\|^2$ und somit $\|F\| = \|y\|$. □

Wie bei Banachräumen können wir auch die direkte Summe von Hilberträumen wieder mit einer Hilbertraumstruktur ausstatten. Seien also $H_1, \ldots, H_n$ Hilberträume. Wir betrachten

$$\bigoplus_{i=1}^n H_i = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in H_i\}$$

und definieren auf diesem Raum ein Skalarprodukt durch $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle_i$. Es ist leicht zu zeigen, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist und $\bigoplus H_i$ vollständig ist. Die ursprünglichen Räume H_i können mit abgeschlossenen Teilräumen von $\bigoplus H_i$ identifiziert werden und sind dann sogar paarweise orthogonale Teilräume von $\bigoplus H_i$. Wir weisen noch darauf hin, dass sich die Norm auf $\bigoplus H_i$ ($\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2\right)^{1/2}$) von der Norm unterscheidet, die man erhält, wenn man wie in Kapitel 2 die Banachraum-Summe der H_i bildet.

Der Projektionssatz sagt, dass $H = M \oplus M^\perp$, wenn M ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums H ist (genauer: die Abbildung $(x, y) \mapsto x + y$ ist eine Bijektion von $M \oplus M^\perp$ auf H und erhält die Hilbertraumstruktur).

Definition 5.5. *Eine Teilmenge $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ eines Hilbertraums H heißt* Orthogonalsystem, *wenn $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$, falls $\alpha \neq \beta$. $\{x_\alpha\}$ heißt* Orthonormalsystem *(ONS), wenn $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$. Ein maximales ONS heißt* Orthonormalbasis *(ONB).*

Satz 5.6. *Jedes ONS kann zu einer ONB ergänzt werden. Insbesondere besitzt jeder Hilbertraum eine ONB.*

Beweis-Skizze. Dies wird wie der entsprechende Satz aus der linearen Algebra (jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums kann zu einer Basis ergänzt werden) mit Hilfe des Lemmas von Zorn bewiesen, indem die ONS, die ein gegebenes ONS enthalten, durch Inklusion geordnet werden. □

Satz 5.7. *Sei $\{x_\alpha\}$ eine ONB. Dann gilt für jedes $y \in H$:*

$$y = \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y\rangle x_\alpha,$$

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, y\rangle|^2 \qquad \textit{(Parseval-Gleichung)}$$

Ist umgekehrt $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Folge mit $\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty$, so existiert $y := \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha$.

Hierbei definieren wir Reihen der Form $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$ wie folgt: Die Reihe existiert und hat den Wert $y \in H$, wenn $z_\alpha \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $\alpha \in I$, und $y = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N z_{\alpha_n}$ für jede Indizierung dieser α's. Eine entsprechende Definition verwenden wir für Reihen über komplexe Zahlen mit beliebiger Indexmenge. Hier können wir auch (äquivalent, aber eleganter) $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha = \int_I c_\alpha \, d\mu(\alpha)$ setzen, wobei μ das Zählmaß auf I ist.

Etwas abstrakter formuliert sagt Satz 5.7, dass $H \cong \ell_2(I)$, wobei

$$\ell_2(I) = \{(c_\alpha)_{\alpha \in I} : \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty\} = L_2(I, \mu).$$

Ein $y \in H$ wird hierbei abgebildet auf $(\langle x_\alpha, y\rangle)_{\alpha \in I}$.

Satz 5.8. *Sei $\{x_\alpha\}$ ein ONS. Dann gilt für jedes $y \in H$:*

$$P_{\overline{L(\{x_\alpha\})}}\, y = \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y\rangle x_\alpha,$$

$$\|y\|^2 \geq \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, y\rangle|^2 \qquad \textit{(Besselsche Ungleichung)}$$

Beweis von Satz 5.7 und 5.8. Wir beweisen zunächst die Besselsche Ungleichung für endliche ONS $\{x_1, \dots, x_N\}$. Wir schreiben $y \in H$ als

$$y = \sum_{n=1}^N \langle x_n, y\rangle x_n + \left(y - \sum_{n=1}^N \langle x_n, y\rangle x_n \right).$$

Eine Rechnung zeigt, dass die beiden Terme auf der rechten Seite orthogonal sind, also

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^N \langle x_n, y\rangle x_n \right\|^2 + \left\| y - \sum_{n=1}^N \langle x_n, y\rangle x_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N |\langle x_n, y\rangle|^2 + \left\| y - \sum_{n=1}^N \langle x_n, y\rangle x_n \right\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x_n, y\rangle|^2. \end{aligned}$$

Die Bessel-Ungleichung für endliche ONS impliziert nun, dass $\{\alpha \in I : |\langle x_\alpha, y\rangle| \geq 1/n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist. Also ist $\{\alpha \in I : \langle x_\alpha, y\rangle \neq 0\}$ abzählbar. Sei $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ eine Indizierung dieser Menge. Dann existiert $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N |\langle x_{\alpha_n}, y\rangle|^2$ und ist wegen der absoluten Konvergenz unabhängig von der Indizierung der α_n's. Wir erhalten die Besselsche Ungleichung für beliebige ONS.

Setze jetzt $y_n = \sum_{i=1}^n \langle x_{\alpha_i}, y\rangle x_{\alpha_i}$. Für $m \geq n$ ist dann

$$\|y_m - y_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \langle x_{\alpha_i}, y\rangle x_{\alpha_i} \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |\langle x_{\alpha_i}, y\rangle|^2.$$

Dies ist ein Teilstück einer konvergenten Reihe. Daher ist y_n eine Cauchyfolge. Setze $y' = \lim y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{\alpha_i}, y\rangle x_{\alpha_i}$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts ist dann für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\langle x_{\alpha_j}, y - y'\rangle = \langle x_{\alpha_j}, y\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{\alpha_i}, y\rangle \delta_{ij} = 0,$$

und falls $\alpha \in I \setminus \{\alpha_j\}$, so ist ebenfalls

$$\langle x_\alpha, y - y'\rangle = -\langle x_\alpha, y'\rangle = -\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{\alpha_i}, y\rangle \langle x_\alpha, x_{\alpha_i}\rangle = 0.$$

Insgesamt ist also $y - y' \in \{x_\alpha\}^\perp = \overline{L(\{x_\alpha\})}^\perp$. Da außerdem $y' \in \overline{L(\{x_\alpha\})}$, gilt $y' = P_{\overline{L(\{x_\alpha\})}} y$. Wenn nun $\{x_\alpha\}$ wie in Satz 5.7 eine ONB ist, so muss $\overline{L(\{x_\alpha\})} = H$ sein, denn sonst könnten wir nach dem Projektionssatz ein größeres ONS finden. Die Parseval-Gleichung folgt nun mit der Stetigkeit der Norm:

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{\alpha_i}, y\rangle x_{\alpha_i} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_{\alpha_i}, y\rangle|^2$$

In ähnlicher Weise zeigt man, dass $y = \sum c_\alpha x_\alpha$ existiert, falls $c_\alpha \in \ell_2$. □

Beispiel 5.1. Sei e_n der n-te Einheitsvektor, also $e_n(m) = \delta_{mn}$. Dann ist $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB von ℓ_2.

Aufgabe 5.3. Beweise diese Aussage.

Beispiel 5.2. $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB von $L_2((-\pi, \pi), \frac{dx}{2\pi})$. Tatsächlich zeigt eine einfache Rechnung, dass $\{e^{inx}\}$ ein ONS ist. Zum Beweis der Maximalität benutzt man zwei Tatsachen aus der Analysis: Die stetigen Funktionen liegen dicht in L_2 und stetige Funktionen können gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden.

Beispiel 5.3. Die *Rademacher-Funktionen* $R_0(x) = 1$,

$$R_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} [k2^{1-n}, (2k+1)2^{-n}) \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Skizze!) bilden ein ONS, aber keine ONB in $L_2(0, 1)$.

Aufgabe 5.4. Beweise diese Aussage.