3. Kategoriesätze

In diesem Abschnitt besprechen wir einige Konsequenzen des Satzes von Baire. Diese fundamentalen Ergebnisse werden auch als Kategoriesätze bezeichnet. Die Kategoriesätze haben alle einen etwas paradoxen Charakter: Eine starke Aussage folgt aus zu schwach aussehenden Voraussetzungen.

Satz 3.1 (Banach-Steinhaus, Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{F} \subset B(X,Y)$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Wenn $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist ($\sup_{A\in\mathcal{F}} \|Ax\| < \infty$ für alle $x \in X$), so ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt ($\sup_{A\in\mathcal{F}} \|A\| < \infty$).*

Beweis. Setze $B_n = \{x \in X : \|Ax\| \le n \quad \forall A \in \mathcal{F}\}$. Dann ist B_n abgeschlossen, denn

$$B_n = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \{x \in X : \|Ax\| \le n\},$$

und die Mengen in diesem Schnitt sind abgeschlossen, da sie die Urbilder der abgeschlossenen Kugeln $\overline{K_n(0)}$ unter A sind. Nach Voraussetzung ist außerdem $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Der Satz von Baire zeigt also, dass ein B_n eine Kugel enthalten muss: Es existieren $n_0 \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ und $x_0 \in X$, so dass $\|Ax\| \le n_0$ für alle $A \in \mathcal{F}$, falls $\|x - x_0\| < \epsilon$. Ist nun $y \in X$ mit $\|y\| = \epsilon/2$, so gilt für alle $A \in \mathcal{F}$:

$$\|Ay\| \le \|A(y + x_0)\| + \|Ax_0\| \le n_0 + C(x_0),$$

wobei $C(x_0) = \sup_{A\in\mathcal{F}} \|Ax_0\|$. Also ist $\|A\| \le (2/\epsilon)(n_0 + C(x_0))$ für alle $A \in \mathcal{F}$. □

Satz 3.2 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Seien X, Y Banachräume, und $A \in B(X,Y)$ sei surjektiv ($R(A) = Y$). Dann ist A eine offene Abbildung, d.h., $A(U)$ ist offen, falls $U \subset X$ offen ist.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen und $y \in A(U)$, also $y = Ax$ für ein $x \in U$. Wir müssen zeigen, dass es eine Kugel $K_\delta(y) \subset A(U)$ gibt. Da U eine Kugel $K_\epsilon(x)$ enthält, können wir annehmen, dass $U = K_\epsilon(x)$. Tatsächlich genügt es, zu zeigen, dass $A(K_R(0))$ für ein $R > 0$ eine Kugel $K_\delta(0)$ enthält, denn dann ist

$$A(K_\epsilon(x)) = Ax + \frac{\epsilon}{R} A(K_R(0)) \supset Ax + \frac{\epsilon}{R} K_\delta(0) = K_{\delta\epsilon/R}(Ax).$$

Zum Beweis dieser Behauptung benutzen wir, dass

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(K_n(0)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A(K_n(0))}.$$

Der Satz von Baire zeigt also, dass ein $\overline{A(K_n(0))}$ eine Kugel $K_\delta(y)$ enthält. Somit ist $K_\delta(0) \subset \overline{A(K_n(0))} - y$, und da $y = Ax$ für ein $x \in X$, ist

$$K_\delta(0) \subset \overline{A(K_n(0))} - Ax = \overline{A(K_n(0) - x)} = \overline{A(K_n(-x))}.$$

Für $N \ge n + \|x\|$ ist $K_n(-x) \subset K_N(0)$, daher ist $K_\delta(0) \subset \overline{A(K_N(0))}$.

Wir zeigen jetzt, dass $\overline{A(K_N(0))} \subset A(K_{2N}(0))$. Dann ist $K_\delta(0) \subset A(K_{2N}(0))$, wie zu zeigen war. Sei also $y \in \overline{A(K_N)}$ (zur Vereinfachung der Notation geben wir den Mittelpunkt 0 nicht mehr explizit an). Dann gibt es ein $x_1 \in K_N$ mit $\|y - Ax_1\| < \delta/2$. Also

$$y - Ax_1 \in K_{\delta/2} = \frac{1}{2} K_\delta \subset \frac{1}{2}\overline{A(K_N)} = \overline{A(K_{N/2})}.$$

Daher können wir jetzt ein $x_2 \in K_{N/2}$ bestimmen mit $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \delta/4$. Wir setzen dieses Verfahren fort und erhalten so eine Folge x_n mit

$$x_n \in K_{2^{-n+1}N}, \quad y - \sum_{i=1}^{n} Ax_i \in K_{2^{-n}\delta}. \tag{3.1}$$

Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}N = 2N < \infty$, also existiert $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und $\|x\| < 2N$, d.h. $x \in K_{2N}$. Wegen der Stetigkeit von A ist

$$Ax = A\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = y.$$

Für die Auswertung der letzten Reihe haben wir die zweite Eigenschaft aus (3.1) benutzt. Insgesamt sehen wir also, dass $y \in A(K_{2N})$, wie behauptet. □

Satz 3.3 (Satz von der stetigen Inversen)**.** *Seien X, Y Banachräume, und sei $A \in B(X,Y)$ bijektiv. Dann ist $A^{-1} \in B(Y,X)$.*

Beweis. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist A offen, also ist A^{-1} stetig. □

Der *Graph* einer Abbildung $A : X \to Y$ ist die Menge $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) : x \in X\}$. $\mathcal{G}(A)$ ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

Definition 3.1. *Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. A heißt* abgeschlossen, *wenn $\mathcal{G}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $X \oplus Y$ ist.*

Ein Operator A ist also genau dann abgeschlossen, wenn folgende Bedingung gilt: Wenn $x_n, x \in X$, $y \in Y$, $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$, so ist $Ax = y$. Diese Bemerkung folgt aus der Beobachtung, dass $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \oplus Y$ genau dann, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$.

Satz 3.4 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer, abgeschlossener Operator. Dann ist $A \in B(X,Y)$.*

Die Umkehrung des Satzes ist auch richtig (und trivial): Ein stetiger linearer Operator ist abgeschlossen. Der Satz wirkt besonders verblüffend, wenn wir noch einmal die Folgencharakterisierungen von stetigen und abgeschlossenen Operatoren gegenüberstellen: A ist stetig, wenn aus $x_n \to x$ folgt, dass $Ax_n \to y$ und $y = Ax$ (eine Kleinigkeit umständlicher als nötig formuliert, um den Vergleich mit abgeschlossen besonders deutlich zu machen). A ist abgeschlossen, wenn aus $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ folgt, dass $y = Ax$. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen sagt also, dass wir bei der Überprüfung von Stetigkeit eine eigentlich zu beweisende Aussage zur Voraussetzung machen dürfen!

Beweis. Wir betrachten die Projektionen $P_1 : X \oplus Y \to X$, $P_2 : X \oplus Y \to Y$, $P_1(x,y) = x$, $P_2(x,y) = y$. Die Definition der Norm auf $X \oplus Y$ zeigt, dass die P_i stetig sind. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{G}(A)$ ein abgeschlossener Teilraum von $X \oplus Y$, also selbst ein Banachraum nach Satz 2.3. Die Einschränkung von P_1 auf $\mathcal{G}(A)$ ist eine Bijektion von $\mathcal{G}(A)$ auf X. Der Satz von der stetigen Inversen zeigt also, dass $P_1^{-1} \in B(X, \mathcal{G}(A))$. Somit ist auch $A = P_2 P_1^{-1}$ als Komposition von stetigen Abbildungen stetig. □