

2. NORMIERTE RÄUME UND BANACHRÄUME

Ein normierter Raum ist ein Vektorraum, auf dem wir Längen messen können. Genauer definieren wir:

Definition 2.1. Sei X ein Vektorraum über \mathbb{C} . Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt Norm auf X , wenn für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$

- 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Eigenschaft 3) heißt wieder *Dreiecksungleichung*; sie hat dieselbe Interpretation wie bei metrischen Räumen. Wir hätten in Definition 2.1 auch reelle Vektorräume zulassen können, aber die Spezialisierung auf komplexe Vektorräume ist sinnvoll, da diese Räume mit Abstand die wichtigsten in der Funktionalanalysis sind.

Ein normierter Raum kann durch die Definition $d(x, y) = \|x - y\|$ mit einer Metrik ausgestattet werden. Wir überprüfen die Eigenschaften aus Definition 1.1:

- 1) $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
- 2) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$;
- 3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

Somit können wir die Begriffe und Ergebnisse aus Kapitel 1 auch auf normierte Räume anwenden. Insbesondere erhalten wir eine Topologie auf einem normierten Raum. Wir wiederholen nochmal einige Begriffe und schreiben sie mit Hilfe der Norm neu auf: Eine Folge $x_n \in X$ heißt konvergent gegen $x \in X$, wenn $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Eine Folge x_n heißt Cauchyfolge, wenn $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ für $m, n \rightarrow \infty$. Eine Menge $U \subset X$ ist offen in der von der Norm (über die Metrik) erzeugten Topologie, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Kugel $K_\epsilon(x)$ gibt, die in U enthalten ist. Hierbei ist

$$K_\epsilon(x) = \{y \in X : \|y - x\| < \epsilon\}.$$

Definition 2.2. Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.

Beispiel 2.1. Die einfachsten Vektorräume sind die endlich-dimensionalen Räume. Wir können gleich $X = \mathbb{C}^n$ nehmen, da jeder n -dimensionale komplexe Vektorraum isomorph zu diesem Raum ist. Mit jeder der Normen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1),$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

wird X zu einem Banachraum. Das wollen wir an dieser Stelle nicht beweisen; wir führen den Beweis etwas später gleich für die unendlich-dimensionalen Versionen dieser Räume.

Beispiel 2.2. Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum. (Z.B. könnte also $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie sein; die zusätzliche Allgemeinheit wird später noch sehr nützlich werden.) Definiere

$$C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig}\},$$

$$\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Dann ist $C(K)$ mit dieser Norm ein Banachraum. Diese Aussage werden wir gleich beweisen; zunächst noch zwei Bemerkungen zur Definition: In der Definition von

$C(K)$ statt \mathbb{C} mit der üblichen Topologie aus. Dann ist f eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, und der Begriff der Stetigkeit ist definiert. Da K kompakt, ist $f(K)$ für $f \in C(K)$ ebenfalls kompakt, und das Maximum aus der Definition von $\|f\|$ existiert.

Wir beweisen jetzt, dass $(C(K), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Die Vektorraumoperationen auf $C(K)$ sind hierbei natürlich punktweise definiert, also z.B. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$. Es ist dann klar, dass $C(K)$ ein komplexer Vektorraum ist, da sich die Rechengesetze aus \mathbb{C} übertragen. Außerdem ist leicht zu sehen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C(K)$ ist. Zum Beweis der Vollständigkeit geben wir uns eine Cauchyfolge $f_n \in C(K)$ vor. Für jedes feste $x \in K$ ist dann

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

also ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge komplexer Zahlen. Somit existiert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Mit einem „ $\epsilon/3$ -Argument“ sehen wir, dass f eine stetige Funktion ist: Seien $x_0 \in K$, $\epsilon > 0$ vorgegeben. Bestimme dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_m - f_n\| < \epsilon/3$ für alle $m, n \geq n_0$. Mit anderen Worten, für alle $x \in K$ ist $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$, falls $m, n \geq n_0$. Mit $m = n_0$ und $n \rightarrow \infty$ folgt also, dass $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon/3$ für alle $x \in K$. Da f_{n_0} stetig ist, können wir eine Umgebung U von x_0 finden, so dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \epsilon/3$ für alle $x \in U$. Für diese x gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

also ist f stetig bei x_0 . Da $x_0 \in K$ beliebig war, ist $f \in C(K)$.

Wie oben sehen wir aus der Cauchybedingung

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad (x \in K, m, n \geq n_0)$$

durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, dass $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in K$ und alle $n \geq n_0$, also $\|f - f_n\| \leq \epsilon$, falls $n \geq n_0$. Somit gilt $f_n \rightarrow f$ in $C(K)$; die Cauchyfolge f_n hat den Limes f .

Beispiel 2.3. Hier betrachten wir Folgenräume, also Banachräume, deren Elemente komplexwertige Folgen sind. Die Normen definieren wir wie in Beispiel 2.1. Als Räume wählen wir jeweils den maximalen Raum, auf dem wir die entsprechende Norm definieren können. Setze also, für $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \ell_p &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir

$$\begin{aligned} \ell_\infty &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, \\ \|x\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|. \end{aligned}$$

Wenn wir auf \mathbb{N} als Indexmenge aufmerksam machen wollen, schreiben wir $\ell_p(\mathbb{N})$. Tatsächlich kann man $\ell_p(I)$ analog zur obigen Definition für beliebige Indexmengen I definieren. Die Räume $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ erhält man dann als Spezialfall $\ell_p(\{1, 2, \dots, n\})$.

Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist ℓ_p ein Banachraum. Für $p = \infty$ (und auch für $p = 1$) lässt sich dieser Beweis ungefähr so führen wie der entsprechende Beweis aus Beispiel 2.2. Für $1 < p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung nicht klar. Wir überlegen uns zunächst vorbereitend, dass ℓ_p überhaupt ein Vektorraum ist. Genauer überlegen wir uns, dass $x + y \in \ell_p$, falls $x, y \in \ell_p$; die Rechengesetze sind natürlich klar, da Addition und Multiplikation mit Skalaren elementweise definiert werden und somit in \mathbb{C} gerechnet wird. Es ist $|x_n + y_n|^p \leq |2x_n|^p + |2y_n|^p$ (ist z.B. $|x_n| \geq |y_n|$, so schätzt bereits der erste Term auf der rechten Seite die linke Seite ab), also

$$\sum |x_n + y_n|^p \leq \sum |2x_n|^p + \sum |2y_n|^p < \infty,$$

falls $x, y \in \ell_p$. Daher ist auch $x + y \in \ell_p$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung brauchen wir die folgende Ungleichung, die auch von unabhängigem Interesse ist. Tatsächlich handelt es sich um eine der wichtigsten Ungleichungen der Mathematik.

Satz 2.1 (Hölder-Ungleichung). *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $1/\infty := 0$), und $x \in \ell_p, y \in \ell_q$. Dann ist $xy = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$ und $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.*

Der Spezialfall $p = q = 2$ heißt Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Eine allgemeinere Version dieser Ungleichung werden wir später (in Kapitel 5) kennenlernen.

Beweis. Die Behauptung ist leicht direkt zu sehen, falls $p = 1$ oder $p = \infty$. Wir nehmen daher an, dass $1 < p, q < \infty$.

Die Logarithmus-Funktion ist konkav, d.h., der Funktionsgraph liegt über der Verbindungsstrecke zweier Punkte des Graphen. (Dies folgt z.B. aus der Tatsache, dass $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$.) Für beliebige $a, b > 0$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt daher

$$\alpha \ln a + (1 - \alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1 - \alpha)b).$$

Wir wenden die Exponentialfunktion an und erhalten $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$. Schließlich substituieren $a = c^p, b = d^q, \alpha = 1/p$ (also $1 - \alpha = 1/q$), wobei wir $c, d > 0$ noch allgemein lassen. Wir erhalten

$$(2.1) \quad cd \leq \frac{c^p}{p} + \frac{d^q}{q} \quad (c, d > 0).$$

Seien nun $x \in \ell_p, y \in \ell_q$ gegeben. Wir nehmen außerdem noch an, dass $x, y \neq 0$, da sonst die Behauptung des Satzes trivial ist. Dann können wir $c = |x_n|/\|x\|_p, d = |y_n|/\|y\|_q$ setzen, jedenfalls, wenn $x_n, y_n \neq 0$. Ungleichung (2.1) liefert

$$\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x_n|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_n|^q}{q \|y\|_q^q}.$$

Diese Abschätzung gilt trivialerweise auch für den bisher ausgeschlossenen Fall $x_n = 0$ oder $y_n = 0$, also insgesamt für alle n . Summation über n zeigt zunächst, dass $xy \in \ell_1$ und liefert dann die Ungleichung

$$\frac{\|xy\|_1}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\|x\|_p^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{\|y\|_q^q}{q \|y\|_q^q} = 1,$$

wie behauptet. □

Satz 2.2 (Minkowski-Ungleichung = Dreiecksungleichung für ℓ_p). *Sei $1 \leq p \leq \infty, x, y \in \ell_p$. Dann ist $x + y \in \ell_p$ und $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.*

Beweis. Wir konzentrieren uns wieder auf den Fall $1 < p < \infty$. Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Behauptung leicht direkt zu zeigen. Wir wissen bereits, dass $x+y \in \ell_p$ (die folgende Abschätzung wird es nochmal zeigen). Mit der Hölder-Ungleichung (Satz 2.1) mit dem gegebenen p und $q = p/(p-1)$ folgt

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum |x_n+y_n|^p = \sum |x_n+y_n| |x_n+y_n|^{p-1} \\ &\leq \sum |x_n| |x_n+y_n|^{p-1} + \sum |y_n| |x_n+y_n|^{p-1} \\ &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Division durch $\|x+y\|_p^{p-1}$ ergibt jetzt die Behauptung, falls $x+y \neq 0$. Falls $x+y = 0$, so gilt die Dreiecksungleichung trivialerweise. \square

Die Vollständigkeit von ℓ_p beweist man ähnlich wie für ℓ_∞ bzw. $C(K)$. Diesen Beweis führen wir hier nicht durch.

Wir definieren noch zwei weitere Folgenräume:

$$\begin{aligned} c &= \{x \in \ell_\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existiert}\}, \\ c_0 &= \{x \in c : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Als Norm nehmen wir $\|x\| = \|x\|_\infty = \sup |x_n|$ ($x \in c$ bzw. $x \in c_0$). Die Diskussion wird hier sehr erleichtert durch die Tatsache, dass diese Räume Teilräume des bereits diskutierten Banachraums ℓ_∞ sind (und wir dieselbe Norm wie auf ℓ_∞ verwenden!). Allgemein gilt:

Satz 2.3. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $Y \subset X$. Dann ist $(Y, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum, wenn Y ein abgeschlossener Teilraum von X ist.*

Aufgabe 2.1. Beweise diesen Satz.

Aufgabe 2.2. Zeige mit Hilfe von Satz 2.3, dass c und c_0 Banachräume sind.

Beispiel 2.4. Sei Ω ein Maßraum und μ ein (positives) Maß auf Ω . In Analogie zu den ℓ_p -Räumen aus Beispiel 2.3 definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \mathcal{L}_p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar, } \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}, \\ \|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}; \\ \mathcal{L}_\infty &= \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar, wesentlich beschränkt}\}, \\ \|f\|_\infty &= \text{ess sup } |f(x)|. \end{aligned}$$

\mathcal{L}_p hängt auch von der σ -Algebra auf Ω ab, obwohl dies in der Notation nicht zum Ausdruck kommt. Eine Funktion heißt *wesentlich beschränkt*, wenn sie durch Abändern auf einer Nullmenge beschränkt gemacht werden kann. Die kleinste so mögliche obere Schranke ist das *wesentliche Supremum* von $|f|$ (ess sup $|f|$), also

$$\begin{aligned} \text{ess sup } |f(x)| &= \inf_{N: \mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| \\ &= \inf \{M \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3. a) Beweise, dass beide Formeln dasselbe Ergebnis liefern.
b) Zeige, dass das wesentliche Supremum selbst eine wesentliche obere Schranke ist, d.h., es gibt eine Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass $|f(x)| \leq \text{ess sup } |f|$ für alle $x \notin N$.

Es ist klar, dass die oben angegebenen Normen im Allgemeinen *keine* Normen auf \mathcal{L}_p sind, denn es ist $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ f.ü. Das wird wie üblich dadurch behoben, dass Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, identifiziert werden. Wir führen also eine Äquivalenzrelation \sim ein durch

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

Mit Hilfe von \sim bilden wir Äquivalenzklassen von Funktionen $(f) = \{g : g \sim f\}$ und definieren L_p -Räume als Räume von Äquivalenzklassen von Funktionen:

$$L_p(\Omega, \mu) = \{(f) : f \in \mathcal{L}_p\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

Die Norm auf L_p wird wie oben definiert als $\|(f)\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ bzw. $\|(f)\|_\infty = \text{ess sup } |f|$. Diese Definition ist sinnvoll, da die rechten Seiten nicht von der Wahl des Repräsentanten $f \in (f)$ abhängen.

Tatsächlich ist es nicht üblich, in Sprechweise und Notation auf dieser Unterscheidung zwischen Äquivalenzklassen von Funktionen und Funktionen zu bestehen. Wir bezeichnen daher die Elemente von L_p doch wieder direkt als Funktionen (statt korrekter, aber zu umständlich von Äquivalenzklassen von Funktionen zu reden) und wir unterscheiden nicht zwischen Elementen von L_p und ihren Repräsentanten.

Die Räume L_p sind Banachräume für $1 \leq p \leq \infty$. Wir beweisen hier nur die Vollständigkeit von L_1 . Ein ähnliches Argument zeigt die Vollständigkeit von L_p für $1 < p < \infty$; die Vollständigkeit von L_∞ ist leicht zu beweisen. Wie in Beispiel 2.3 ist auch die Dreiecksungleichung für $p \neq 1, \infty$ nicht offensichtlich. Sie folgt wieder aus der Abschätzung $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, falls $f \in L_p$, $g \in L_q$ und $1/p + 1/q = 1$. Der Beweis ist derselbe wie für Satz 2.1, und die Ungleichung wird wieder als Hölder-Ungleichung bezeichnet. Die Dreiecksungleichung heißt wieder Minkowski-Ungleichung.

Wie angekündigt zeigen wir jetzt, dass L_1 vollständig ist. Sei also $f_n \in L_1$ eine Cauchyfolge. Wir können eine Teilfolge f_{n_k} bestimmen, so dass $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (wie?). Setze

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^j |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Die Funktionenfolge S_j erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi: S_j ist messbar, $S_j \geq 0$ und $S_j \leq S_{j+1}$. Da außerdem

$$\int S_j(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^j \int |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| d\mu(x) < \sum_{k=1}^j 2^{-k} < 1,$$

zeigt der Satz von Beppo Levi, dass die Funktion $S(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} S_j(x)$ in L_1 liegt. Zu Übungszwecken leiten wir diese Aussage nochmals mit Hilfe des Lemmas von Fatou her. Da $S_j \geq 0$, ist es auf die Funktionenfolge S_j anwendbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int S(x) d\mu(x) &= \int \lim_{j \rightarrow \infty} S_j(x) d\mu(x) = \int \liminf_{j \rightarrow \infty} S_j(x) d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int S_j(x) d\mu(x) \leq 1, \end{aligned}$$

also $S \in L_1$, wie wir bereits wissen.

Insbesondere ist also $S(x) < \infty$ f.ü. Somit existiert auch die Reihe

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

für f.a. x . Es handelt sich hierbei um eine Teleskopsumme:

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{j-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = f_{n_j}(x)$$

Also konvergiert $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ für f.a. x . Außerdem ist

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq S(x) \in L_1.$$

Wir sehen, dass $f \in L_1$, und wir können den Satz von Lebesgue auf die Funktionenfolge $|f_{n_j} - f|$ anwenden und erhalten

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |f_{n_j}(x) - f(x)| d\mu(x) = 0.$$

Mit anderen Worten: $\|f_{n_j} - f\|_1 \rightarrow 0$. Da f_n eine Cauchyfolge ist, folgt auch, dass $f_n \rightarrow f$ in L_1 (vergleiche Aufgabe 2.4).

Aufgabe 2.4. Sei x_n eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum X . Zeige: Wenn es eine Teilfolge x_{n_k} gibt, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Der Beweis hat eine wichtige zusätzliche Eigenschaft von konvergenten Folgen in L_p -Räumen gezeigt, die wir uns gesondert aufschreiben:

Korollar 2.3. *Es gelte $f_n \rightarrow f$ in L_p ($1 \leq p < \infty$). Dann gibt es eine Teilfolge f_{n_k} , so dass $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ f.ü.*

Für $p = \infty$ ist die Aussage auch richtig und leicht direkt zu sehen; in diesem Fall ist es nicht nötig, zu einer Teilfolge überzugehen.

Die ℓ_p -Räume aus Beispiel 2.3 sind spezielle L_p -Räume: Es gilt $\ell_p = L_p(\mathbb{N}, \mu)$, wobei μ das Zählmaß auf \mathbb{N} ist, also $\mu(\{n\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Beobachtung werden wir allerdings nicht weiter benutzen.

Wir betrachten nun lineare Abbildungen zwischen zwei normierten Räumen X, Y . Dabei heißt $A : X \rightarrow Y$ linear, wenn $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ und $A(\alpha x) = \alpha Ax$ für alle $x_i, x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$. Abbildungen werden in der Funktionalanalysis auch gern als *Operatoren* bezeichnet. Für den Kern (oder Nullraum) bzw. das Bild von A schreiben wir

$$N(A) = \{x \in X : Ax = 0\},$$

$$R(A) = \{Ax : x \in X\}.$$

Satz 2.4. *Sei $A : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1) A ist stetig;
- 2) A ist stetig bei $x = 0$;
- 3) A ist beschränkt, d.h., es gibt ein $C \geq 0$, so dass $\|Ax\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$.

Beweis. 1) \Rightarrow 2): klar

2) \Rightarrow 3): Angenommen, A ist nicht beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, so dass $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Setze $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Dann gilt $y_n \rightarrow 0$, aber $\|Ay_n\| > 1$, also $Ay_n \not\rightarrow 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass A doch beschränkt sein muss.

3) \Rightarrow 1): Wenn $x_n \rightarrow x$, so gilt

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

also konvergiert Ax_n gegen Ax . \square

Wir schreiben $B(X, Y)$ für die Menge der linearen, stetigen (oder beschränkten) Abbildungen von X nach Y :

$$B(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \text{ stetig, linear}\}$$

Auf $B(X, Y)$ führen wir eine Norm ein durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Die Normeigenschaften beweisen wir gleich. Diese spezielle Norm heißt *Abbildungsnorm* oder *Operatornorm*. Weitere Möglichkeiten, $\|A\|$ auszurechnen, sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \|A\| &= \inf\{C \geq 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\} \\ &= \min\{C \geq 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5. Beweise diese Aussagen.

Satz 2.5. a) $B(X, Y)$ mit der Operatornorm ist ein normierter Raum.

b) Ist Y ein Banachraum, so ist auch $B(X, Y)$ ein Banachraum.

Für den wichtigen Spezialfall $Y = \mathbb{C}$ (mit der Betragsnorm) verwenden wir eigene Bezeichnungen und Notationen. Wir schreiben $B(X, \mathbb{C}) = X^*$; die Abbildungen aus X^* heißen (lineare, stetige) *Funktionale*, und X^* heißt der (topologische) *Dualraum* von X . Satz 2.5 zeigt, dass X^* ein Banachraum ist.

Beweis. a) Es ist leicht zu zeigen, dass $B(X, Y)$ ein Vektorraum ist. Es gilt $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $Ax = 0$ für alle $x \in X$, also genau dann, wenn A die Nullabbildung ist. Außerdem gilt

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \|A\|,$$

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

b) Sei A_n eine Cauchyfolge in $B(X, Y)$. Für jedes feste $x \in X$ ist dann

$$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\| \leq \|A_m - A_n\| \|x\| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

also ist $A_n x$ eine Cauchyfolge in Y . Da Y vollständig ist, existiert $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung A (also die Abbildung $x \mapsto \lim A_n x$) linear ist:

$$A(x + y) = \lim A_n(x + y) = \lim(A_n x + A_n y) = \lim A_n x + \lim A_n y = Ax + Ay$$

Analog zeigt man, dass $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

A ist auch beschränkt, denn $\|A_n\|$ ist eine konvergente Folge in \mathbb{R} (da $\|\|A_m\| - \|A_n\|\| \leq \|A_m - A_n\|$), also beschränkt, und somit gilt wegen der Stetigkeit der Norm

$$\|Ax\| = \lim \|A_n x\| \leq \left(\sup_n \|A_n\| \right) \|x\|.$$

Wir wissen jetzt also, dass $A \in B(X, Y)$. Als letzten Schritt zeigen wir, dass $A_n \rightarrow A$ in $B(X, Y)$. Für beliebiges $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gilt (wieder wegen der Stetigkeit der Norm)

$$\|(A - A_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(A_m - A_n)x\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|.$$

Es folgt, dass $\|A - A_n\| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|$. Da A_n eine Cauchyfolge ist, konvergiert dieser letzte Ausdruck gegen Null für $n \rightarrow \infty$. \square

Unstetige lineare Abbildungen gibt es tatsächlich, vorausgesetzt, X ist unendlich-dimensional. In diesem Fall können wir sogar $Y = \mathbb{C}$ wählen. Um solche Abbildungen anzugeben, verwenden wir eine (algebraische) Basis $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ von X . Die e_α sind also linear unabhängig, und jedes $x \in X$ hat eine (eindeutige) Darstellung der Form $x = \sum_{i=1}^n c_i e_{\alpha_i}$ mit $c_i \in \mathbb{C}$. Wir benutzen jetzt, dass es zu beliebigen auf einer Basis vorgeschriebenen Werten genau eine lineare Abbildung gibt, die diese Werte annimmt. Es gibt also eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $Ae_\alpha = c_\alpha \|e_\alpha\|$; hierbei können die $c_\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig vorgeschrieben werden. Es genügt jetzt, c_α 's mit $\sup_{\alpha \in I} |c_\alpha| = \infty$ zu wählen. Das entsprechende A ist offensichtlich nicht beschränkt.

Definition 2.4. Zwei Normen auf einem Vektorraum X heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Topologie erzeugen.

Satz 2.6. Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Beweis. Wegen Satz 2.4 sagt die Bedingung, dass die Identität als Abbildung von $(X, \|\cdot\|_1)$ nach $(X, \|\cdot\|_2)$ und als Abbildung von $(X, \|\cdot\|_2)$ nach $(X, \|\cdot\|_1)$ stetig ist. Mit anderen Worten, die Bedingung mit den Konstanten gilt genau dann, wenn die Identität ein Homöomorphismus von $(X, \|\cdot\|_1)$ auf $(X, \|\cdot\|_2)$ ist, und dies gilt genau dann, wenn die Topologien übereinstimmen. \square

Satz 2.6 zeigt auch, dass die Räume $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ entweder beide nicht vollständig oder beide vollständig sind, wenn die Normen äquivalent sind.

Aufgabe 2.6. Beweise diese Bemerkung.

Satz 2.7. Auf einem endlich-dimensionalen Raum sind alle Normen äquivalent.

Insbesondere sind endlich-dimensionale normierte Räume nach der Bemerkung oben also immer Banachräume.

Beweis. Wir können $X = \mathbb{C}^n$ als zugrunde liegenden Raum nehmen. Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist. Wir benutzen Satz 2.6. Es ist klar, dass

$$(2.2) \quad \|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \leq \left(\max_{j=1, \dots, n} \|e_j\| \right) \|x\|_1.$$

Hierbei verwenden wir die üblichen Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ usw. Wir betrachten jetzt die Identität $x \mapsto x$ als Abbildung von $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Wegen (2.2) ist diese Abbildung stetig. Da die Norm ebenfalls eine stetige Abbildung ist, ist auch die zusammengesetzte Abbildung $x \mapsto \|x\|$ von $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ nach \mathbb{R} stetig. Da $\{x : \|x\|_1 = 1\}$ eine kompakte Teilmenge von \mathbb{C}^n (in der von $\|\cdot\|_1$ erzeugten Topologie) ist, gilt

$$\inf_{\|x\|_1=1} \|x\| = \min_{\|x\|_1=1} \|x\| =: \epsilon > 0.$$

Es folgt, dass $\|x\| \geq \epsilon \|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, und dies ist die andere Ungleichung aus der Bedingung aus Satz 2.6 \square

Satz 2.8. *Sei $A : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen, und sei $\dim X < \infty$. Dann ist A stetig.*

Beweis. Wir können wieder $X = \mathbb{C}^n$ setzen. Wegen Satz 2.7 können wir $X = \mathbb{C}^n$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ ausstatten. Dann folgt wie in (2.2), dass

$$\|Ax\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|Ae_j\| \leq \left(\max_{j=1, \dots, n} \|Ae_j\| \right) \|x\|_1.$$

\square

Zum Schluss dieses Kapitels überlegen wir uns, wie wir auf direkten Summen und Quotienten von Banachräumen eine Norm definieren können. Seien also X_1, \dots, X_n Banachräume. Sei X die direkte Summe der Vektorräume X_j . Also

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in X_j\},$$

und die Vektorraumoperationen werden komponentenweise erklärt.

Satz 2.9. $\|x\| = \sum_{j=1}^n \|x_j\|_j$ ist eine Norm auf X , und $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Es ist klar, dass X ein Vektorraum ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf X definiert. Wenn $x^{(m)}$ eine Cauchyfolge in X ist, so folgt aus der Definition der Norm, dass $x_j^{(m)}$ eine Cauchyfolge in X_j ist für jedes feste $j = 1, \dots, n$. Also existiert $x_j := \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)}$, und es folgt, dass $x^{(m)} \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ in X . \square

Für den oben konstruierten Banachraum verwenden wir die Notation $X = \bigoplus_{j=1}^n X_j$.

Sei nun $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraums X . Der Quotient X/M ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $\{(x) : x \in X\}$, wobei x äquivalent zu y ist, wenn $x - y \in M$. Also $(x) = x + M = \{x + m : m \in M\}$. X/M kann mit einer Vektorraumstruktur versehen werden. Dazu rechnet man mit Repräsentanten, also $(x) + (y) := (x + y)$, $\alpha(x) := (\alpha x)$. Diese Definitionen sind sinnvoll, da die rechten Seiten unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. Schließlich führen wir eine Norm auf X/M ein durch

$$\|(x)\| := \inf_{y \in (x)} \|y\|.$$

Satz 2.10. $(X/M, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist. Es ist $\|(x)\| = 0$ genau dann, wenn es $m_n \in M$ gibt, so dass $\|x - m_n\| \rightarrow 0$, also genau dann, wenn $x \in \overline{M} = M$. Dies gilt genau dann, wenn $(x) = (0)$. Sei nun $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Dann ist

$$\|\alpha(x)\| = \|(\alpha x)\| = \inf_{m \in M} \|\alpha x - m\| = \inf_{m \in M} \|\alpha x - \alpha m\| = |\alpha| \|(x)\|.$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} \|(x) + (y)\| &= \inf_{m \in M} \|x + y - m\| = \inf_{m_1, m_2 \in M} \|x + y - m_1 - m_2\| \\ &\leq \inf_{m_1, m_2 \in M} (\|x - m_1\| + \|y - m_2\|) = \|(x)\| + \|(y)\|. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass X/M vollständig ist. Sei (x_n) also eine Cauchyfolge. Wähle zunächst eine Teilfolge (x_{n_j}) mit $\|(x_{n_{j+1}}) - (x_{n_j})\| < 2^{-j}$ und dann (induktiv) Repräsentanten (oBdA die x_{n_j} selbst) mit $\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| < 2^{-j}$. Dann ist x_{n_j} eine Cauchyfolge in X , und somit existiert $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}$. Dann konvergiert aber erst recht $(x_{n_j}) \rightarrow (x)$, und da (x_n) eine Cauchyfolge ist, konvergiert auch die ganze Folge $(x_n) \rightarrow (x)$. \square