FUNKTIONALANALYSIS, KAPITEL 1

CHRISTIAN REMLING

1. Metrische Räume

Ein metrischer Raum ist eine Menge, auf der wir Abstände messen können. Genauer sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und d eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Definition 1.1. (X, d) *heißt* metrischer Raum, *wenn für alle* $x, y, z \in X$ *gilt:*
1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$*;*
2) $d(x, y) = d(y, x)$*;*
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Eigenschaft 3) heißt *Dreiecksungleichung.* Anschaulich interpretiert sagt die Dreiecksungleichung, dass man nicht abkürzen kann, indem man einen Umweg nimmt. d heißt eine Metrik auf X.

Definition 1.1 ist sehr allgemein und lässt viele verschiedenartige Beispiele zu. Wir betrachten nun einige derartige Beispiele, werden aber an dieser Stelle nicht beweisen, dass die angegebenen Abstandsfunktionen wirklich Metriken sind. Teilweise ist der Beweis der Dreiecksungleichung nicht ganz einfach; wir kommen später (Kapitel 2) auf diese Beispiele zurück.

Beispiel 1.1. $X = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist mit der Abstandsfunktion $d(x, y) = |x - y|$ ein metrischer Raum.

Beispiel 1.2. Für jedes $p \geq 1$ ist

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

eine Metrik auf $X = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Hierbei schreiben wir die Elemente von X als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Eine weitere Metrik auf X ist gegeben durch

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|.$$

Beispiel 1.3. Auf dem Raum

$$X = C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$$

können wir analoge Metriken einführen:

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$
$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Beispiel 1.4. Auf einer beliebigen (nicht leeren) Menge X ist

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik.

Definition 1.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und x_n eine Folge aus X. x_n heißt* konvergent *gegen $x \in X$, wenn $d(x_n,x) \to 0$. x_n heißt* Cauchyfolge, *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_m,x_n) < \epsilon$ für alle $m,n \geq n_0$.*

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig, denn wenn $x_n \to x$, $x_n \to y$, so ist

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \to 0.$$

Außerdem ist eine konvergente Folge eine Cauchfolge: Gilt $x_n \to x$ und ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass $d(x_n,x) < \epsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Also ist für alle $m,n \geq n_0$

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Die Umkehrung gilt in allgemeinen metrischen Räumen nicht. Ein entsprechendes Beispiel erhalten wir, wenn wir eine Folge rationaler Zahlen $x_n \in \mathbb{Q}$ wählen, die (in $\mathbb{R}$) gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Dann ist x_n eine Cauchyfolge im metrischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der Betragsmetrik (wie in Beispiel 1.1), denn x_n ist konvergent in $\mathbb{R}$, also eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$. x_n ist aber nicht konvergent im metrischen Raum $\mathbb{Q}$, denn wäre x_n konvergent in $\mathbb{Q}$ gegen ein $q \in \mathbb{Q}$, so müsste auch in $\mathbb{R}$ gelten, dass $x_n \to q$. Das ist nicht möglich, da $x_n \to \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$.

Wir zeichnen nun die metrischen Räume aus, in denen das Cauchykriterium doch wie gewohnt gilt:

Definition 1.3. *Ein metrischer Raum heißt* vollständig, *wenn jede Cauchyfolge konvergiert.*

Bei nicht vollständigen Räumen ist die Situation immer wie im oben besprochenen Beispiel. Nicht konvergente Cauchyfolgen kann es nur deshalb geben, weil der potentielle Grenzwert nicht im betrachteten Raum liegt. Man kann metrische Räume daher immer durch Hinzunahme dieser Punkte „vervollständigen“.

Satz 1.1. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Setze*

$$K_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y,x) < \epsilon\},$$
$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \forall x \in U\ \exists \epsilon > 0, \text{ so dass } K_\epsilon(x) \subset U\}.$$

Dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum. Außerdem gilt

$$x_n \xrightarrow{d} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. Es ist klar, dass $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Wenn $U_1,\ldots,U_n \in \mathcal{T}$ und $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, so gibt es für jedes $i = 1,\ldots,n$ ein $\epsilon_i > 0$, so dass $K_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$ (da $x \in U_i$ für alle i). Setze $\epsilon = \min \epsilon_i$. Dann ist $\epsilon > 0$ und $K_\epsilon(x) \subset U_i$ für alle i, also $K_\epsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Sei nun $U_\alpha \in \mathcal{T}$ und $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Dann ist $x \in U_{\alpha_0}$ für ein $\alpha_0 \in I$, also gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $K_\epsilon(x) \subset U_{\alpha_0}$, also erst recht $K_\epsilon(x) \subset \bigcup U_\alpha$.

Zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft brauchen wir das folgende einfache, aber wichtige Lemma:

Lemma 1.4. *Für alle $x \in X$, $\epsilon > 0$ ist $K_\epsilon(x) \in \mathcal{T}$.*

Beweis von Lemma 1.4. Sei $z \in K_\epsilon(x)$, also $d(x,z) < \epsilon$. Dann ist $r := \epsilon - d(x,z) > 0$, und falls $y \in K_r(z)$, so gilt

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + r = \epsilon,$$

also $y \in K_\epsilon(x)$. Da $y \in K_r(z)$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass $K_r(z) \subset K_\epsilon(x)$, also ist $K_\epsilon(x)$ offen. □

Seien jetzt $x, y \in X$, $x \neq y$. Setze $\epsilon = (1/3)\, d(x,y) > 0$. Falls $z \in K_\epsilon(x) \cap K_\epsilon(y)$, so ist

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < \epsilon + \epsilon = \frac{2}{3}\, d(x,y).$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $K_\epsilon(x) \cap K_\epsilon(y) = \emptyset$, und somit ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum.

Wir kommen jetzt zum Beweis der letzten Behauptung. Wir nehmen zunächst an, dass $x_n \xrightarrow{d} x$ und fixieren eine Umgebung V von x. Es gibt ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $U \subset V$. Nach Konstruktion von $\mathcal{T}$ gibt es dann ein $\epsilon > 0$, so dass $K_\epsilon(x) \subset U$. Andererseits können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \ge n_0$. Für diese n ist dann also auch $x_n \in V$.

Die Umkehrung ist klar, da die Kugeln $K_\epsilon(x)$ nach Lemma 1.4 spezielle Umgebungen von x sind.

Der letzte Teil des Beweises hätte etwas abstrakter geführt werden können; es genügt festzustellen, dass die Kugeln $K_\epsilon(x)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ bilden. □

Topologische Eigenschaften in einem metrischen Raum können wie gewohnt durch Folgen charakterisiert werden. In aller Regel sind diese Folgenkriterien handlicher und nützlicher als die etwas sperrigen topologischen Definitionen. Aus diesen Gründen ist der Umgang mit topologischen Räumen, die nicht wie in Satz 1.1 „metrisierbar" sind, oft viel schwieriger.

Satz 1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, der wie in Satz 1.1 mit einer Topologie versehen ist.*

a) Die Kugeln $\{K_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ bilden eine Umgebungsbasis bei x, d.h., zu jeder Umgebung U von x gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $K_\epsilon(x) \subset U$.

b) $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $x_n \in A$, $x \in X$, $x_n \to x$ folgt, dass $x \in A$.

c) Sei $B \subset X$. Dann ist $\overline{B} = \{x \in X : \exists\, x_n \in B \text{ mit } x_n \to x\}$.

d) $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $x_n \in K$ eine in K konvergente Teilfolge enthält.

e) Sei $Y \subset X$. Die von $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie stimmt mit der von d auf dem metrischen Raum (Y, d) erzeugten Topologie überein.

Diesen Satz wollen wir nicht beweisen.

Satz 1.3. *Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, sei f eine Funktion $f : X \to Y$, und sei $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
1) f ist stetig bei x.
2) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $e(f(x), f(x')) < \epsilon$ für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$.
3) Wenn $x_n \xrightarrow{d} x$, so folgt $f(x_n) \xrightarrow{e} f(x)$.

Die Stetigkeit von f in Bedingung 1) ist definiert mit Hilfe der von den Metriken erzeugten Topologien. Mit anderen Worten: Bedingung 1) sagt, dass es zu jeder Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ eine Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so dass $f(U) \subset V$.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): $K_\epsilon(f(x))$ ist eine Umgebung von $f(x)$, nach Voraussetzung gibt es also eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset K_\epsilon(f(x))$. Außerdem existiert ein $\delta > 0$, so dass $K_\delta(x) \subset U$. Dieses δ hat die gewünschten Eigenschaften.

2) $\Rightarrow$ 3): Seien $x_n \to x$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass $e(f(x), f(x')) < \epsilon$, falls $d(x, x') < \delta$. Da $x_n \to x$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \delta$, falls $n \geq n_0$. Für diese n ist also $e(f(x_n), f(x)) < \epsilon$.

3) $\Rightarrow$ 1): Wir nehmen an, dass die Behauptung nicht gilt. Dann gibt es eine (oBdA: offene) Umgebung V von $f(x)$, für die $f(U) \not\subset V$ für alle Umgebungen U von x ist. Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K_{1/n}(x)$ mit $f(x_n) \notin V$. Da V offen ist und $f(x) \in V$, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $K_\epsilon(f(x)) \subset V$. Somit haben wir eine Folge x_n gefunden mit $x_n \to x$, aber $e(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon > 0$, also $f(x_n) \not\to f(x)$. Dieser Widerspruch zu Eigenschaft 3) zeigt, dass die Behauptung doch gelten muss. □

Zum Abschluss dieses Kapitels beweisen wir unseren ersten „großen" funktionalanalytischen Satz. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums heißt *nirgends dicht,* wenn $\overline{M}$ keine offene Kugel enthält. (Allgemeiner heißt eine Teilmenge M eines topologischen Raums nirgends dicht, wenn das Innere des Abschlusses leer ist: $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$.)

Satz 1.4 (Baire)**.** *Sei X ein vollständiger metrischer Raum, und seien A_n ($n \in \mathbb{N}$) nirgends dichte Mengen. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq X$.*

Beweis. Da A_i genau dann nirgends dicht ist, wenn $\overline{A_i}$ nirgends dicht ist, können wir annehmen, dass alle A_i abgeschlossen sind. Der nun folgende Beweis ist im Wesentlichen eine Variante des berühmten Cantorschen Diagonalarguments für die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. Die Mengen $A_1, A_2, \ldots$ werden Schritt für Schritt vermieden; so erhalten wir ein Element, das nicht in $\bigcup A_n$ liegt.

Da A_1 nirgends dicht ist, gibt es zunächst ein $x_1 \in X \setminus A_1$. Da $X \setminus A_1$ offen ist, können wir außerdem ein $\epsilon_1 > 0$ finden, so dass $K_{\epsilon_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset$. Wir wählen $\epsilon_1 \leq 2^{-1}$ (das einmal gefundene ϵ_1 kann natürlich weiter verkleinert werden).

Im zweiten Schritt wählen wir ein $x_2 \in K_{\epsilon_1/2}(x_1)$, $x_2 \notin A_2$. Ein solches x_2 muss es geben, da A_2 nirgends dicht ist und somit die Kugel $K_{\epsilon_1/2}(x_1)$ nicht enthalten kann. Dann bestimmen wir ein $\epsilon_2 > 0$, so dass

$$K_{\epsilon_2}(x_2) \cap A_2 = \emptyset, \quad K_{\epsilon_2}(x_2) \subset K_{\epsilon_1/2}(x_1), \quad \epsilon_2 \leq 2^{-2}.$$

Allgemein bestimmen wir auf diese Weise induktiv Folgen $x_n \in X$, $\epsilon_n > 0$ mit

$$K_{\epsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset, \quad K_{\epsilon_n}(x_n) \subset K_{\epsilon_{n-1}/2}(x_{n-1}), \quad \epsilon_n \leq 2^{-n}.$$

Dann ist x_n eine Cauchfolge, denn für $k, m \in \mathbb{N}$ liegen x_m und x_{m+k} beide in $K_{\epsilon_m/2}(x_m)$, also

$$d(x_m, x_{m+k}) \leq \epsilon_m/2 \to 0 \quad (m \to \infty). \tag{1.1}$$

Da X vollständig ist, existiert also $x := \lim x_n$. Es ist

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, x) \tag{1.2}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wegen (1.1) ist $d(x_m, x_n) \leq \epsilon_m/2$, falls $n \geq m$, und $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Also folgt aus (1.2), dass $d(x_m, x) \leq \epsilon_m/2$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $K_{\epsilon_m}(x_m) \cap A_m = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

Eine G_δ*-Menge* (δ für „Durchschnitt") ist eine Menge, die als abzählbarer Schnitt offener Mengen geschrieben werden kann. Durch Übergang zu den Komplementen und Anwendung von Satz 1.4 auf Teilräume des ursprünglichen Raums erhält man die folgende Umformulierung des Satzes von Baire:

Satz 1.5 (Baire)**.** *Sei X ein vollständiger metrischer Raum, und seien $G_1, G_2, \ldots$ dichte G_δ-Mengen. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ ebenfalls eine dichte G_δ-Menge.*

Aufgabe 1.1. Beweise Satz 1.5.

Ein Spezialfall von Satz 1.5 ist

Korollar 1.5. *In einem vollständigen metrischen Raum ist der Schnitt von abzählbar vielen dichten offenen Mengen wieder dicht.*

Der Satz von Baire hat viele wichtige Konsequenzen; diese Sätze werden wir in Kapitel 3 besprechen. Darüber hinaus gibt es noch eine Reihe von eher humoristischen Anwendungen. Satz 1.5 sagt, dass dichte G_δ-Mengen (im topologischen Sinn) große Mengen sind: selbst abzählbare Schnitte solcher Mengen sind noch dicht. Wir nennen daher eine Eigenschaft *generisch,* wenn sie mindestens auf einer dichten G_δ-Menge gilt.

Beispiel 1.5. Die generische stetige Funktion ist nirgends differenzierbar. Genauer gilt folgendes: Im metrischen Raum $X = C[a, b]$ mit der Metrik $d(f, g) = \max |f(x) - g(x)|$ (vergleiche Beispiel 1.3) enthält die Menge derjenigen Funktionen, die an keiner Stelle $x \in [a, b]$ differenzierbar sind, eine dichte G_δ-Menge.

Beispiel 1.6. Der generische Münzwurf widerlegt das Gesetz der großen Zahlen. Hier ist der zugrunde liegende metrische Raum der Raum der (unendlichen) Münzwürfe, $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = K, Z\}$. Als Metrik verwenden wir

$$d(x, y) = \sum_{x_n \neq y_n} 2^{-n},$$

d.h., wir summieren über diejenigen $n \in \mathbb{N}$, für die $x_n \neq y_n$. Diese Metrik ist „natürlich"; sie erzeugt die Produkttopologie auf $X = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{K, Z\}$.

Wir bezeichnen die Zahl der K's in den ersten n Würfen mit K_n. Wenn die einzelnen Würfe unabhängig sind und $P(K) = P(Z) = 1/2$, so gilt mit Wahrscheinlichkeit 1, dass $K_n/n \to 1/2$ (starkes Gesetz der großen Zahlen). Generisch gilt das nicht! Tatsächlich gilt für den generischen Münzwurf, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{K_n}{n} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{K_n}{n} = 1.$$